

7. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Winter 2024/25

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 7.1 Zeigen Sie:

- 1) Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen sind offen.
- 2) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}}] - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} [=] 0, 1 [$,
d.h. der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen braucht nicht offen zu sein.

Aufgabe 7.2

- 1) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

$$D_1 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \} \text{ ist abgeschlossen.}$$

$$D_2 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \neq g(\bar{x}) \} \text{ ist offen.}$$

- 2) Untersuchen Sie, ob folgende Mengen offen sind und ob D_4 abgeschlossen ist.

$$D_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < x(4 - x) \}$$

$$D_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

Aufgabe 7.3 Zeigen Sie: Die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R}

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar} \}$$

ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n}$; dabei identifiziere man $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit \mathbb{R}^{n^2} .